

# Umweltschutz: Mathematische Methoden und Modelle

Werner Timischl

Technische Universität Wien  
Wiedner Hauptstr. 8-10/1183, A-1040 Wien

## 1 Einleitung

Seit dem Erscheinen des „Stummen Frühlings“, mit dem Carson (1962) vor fast 30 Jahren die Öffentlichkeit aufrüttelte, hat die Ökologie einen beträchtlichen Aufschwung erfahren. Einen wesentlichen Anteil daran besitzt der systemökologische Ansatz, der im Gegensatz steht zur klassischen Vorgangsweise, natürliche oder künstliche Vorgänge für sich, d.h., losgelöst von ihrem Umfeld zu betrachten. Die Systemökologie ist ihrem Wesen nach interdisziplinär, und das mag ein Grund dafür sein, daß sie einen z.T. beachtlichen Grad der Mathematisierung aufweist. Die Verwendung von mathematischen Modellen ist hier zu einer allgemein akzeptierten Methode der Theoriebildung geworden, und zwar für das gesamte Spektrum ökologischer Systeme, das von Elementarprozessen (z.B. Populationswachstum, Dekomposition von Detritus, Schadstoffausbreitung) bis hinauf zu globalen Systemen reicht.

Ein typischer Problemkreis von globaler Dimension ist die Bedrohung der Atmosphäre durch Zerstörung der Ozonschicht. Die Modellierung der Ozondynamik ist außerordentlich aufwendig. Um die photochemischen Prozesse einigermaßen vollständig zu beschreiben, müssen etwa 140 Reaktionen berücksichtigt werden, die in das atmosphärische Zirkulationsgeschehen eingebunden sind. Aus rechentechnischen Gründen ist es zur Zeit nicht möglich, die komplexe Photochemie mit einem dreidimensionalen Zirkulationsmodell, wie es für die Wettervorhersage verwendet wird, zu koppeln. Vielmehr muß man sich mit einer zweidimensionalen Approximation des Zirkulationsablaufs in einem Breiten-Höhen-System begnügen (Fabian 1987). Aber selbst wenn man von dieser Modellschwäche absieht, ist es fraglich,

ob man aus dem Modell quantitative Schlüsse ziehen kann. Denn das Modell enthält eine große Anzahl von Parametern, deren Bestimmung einen ungeheuren Meßaufwand voraussetzen, um die unvermeidbaren statistisch bedingten Fehler klein zu halten. Hier liegt das Dilemma aller komplexen Modellbildungen: Je komplexer ein Modell, desto größer ist die Anzahl der Modellparameter; je mehr Parameter aber mit einem Datensatzes ermittelt werden müssen, desto größer die Unsicherheit der Parameterschätzung. Man ist also mit einer Art Unschärferelation (zwischen der Parameterzahl und der Genauigkeit der Parameterschätzung) konfrontiert, die ein optimales Niveau für die Komplexität vorgibt (Jorgensen 1988).

Was für das Ozonmodell gesagt wurde gilt mehr oder weniger auch für andere in der Öffentlichkeit vielbeachtete Problemkreise wie Klimaentwicklung, Treibhauseffekt, Luftverschmutzung, Saurer Regen, Waldsterben aber auch das Umkippen eines Gewässers durch Eutrophierung. Wesentliche und vor allem quantitative Aussagen sind nur im Rahmen einer umfassenden Systemanalyse möglich. An ihrem Beginn stehen meist einfache Modellbildungen. Die Einfachheit kann strukturell oder konzeptionell bedingt sein. Strukturell einfache Modelle beschränken sich auf die im System ablaufenden Elementarprozesse bzw. auf abgrenzbare Subsysteme. Konzeptionell einfache Modelle sind von vornherein auf ein Teilproblem angelegt, das man prinzipiell in den Griff bekommen möchte, indem man sich nur auf Schlüsselfaktoren konzentriert und alles andere wegläßt. Erst wenn man die genannten einfachen Modellstudien erfolgreich bewältigt hat, sollte man sich an das Gesamtsystem heranwagen und dafür ein Simulationsmodell entwickeln.

Im folgenden wird versucht, die Technik und Nützlichkeit einfacher Modellbildungen im Umweltbereich an Hand von ausgewählten Beispielen aufzuzeigen. Dabei wird zuerst kurz die deskriptive Modellierung und dann ausführlicher die analytische Modellierung behandelt. Die Beispiele stammen aus verschiedensten Quellen, z.T. auch aus Originalarbeiten. Weitere (aufbereitete) Beispiele findet man z.B. in Spain (1982), Bossel (1985), Richter (1985) und Jeffers (1990).

## **2 Deskriptive Modellierung**

### **2.1 Systembeschreibung durch Kennzahlen**

Die deskriptive Modellierung bedient sich statistischer Methoden, um Systemeigenschaften durch Kennzahlen, Regressionsfunktionen u.a. darzustel-

len. Als Beispiel für eine Kennzahl sei der Shannon-Index (vgl. z.B. Pielou 1977)

$$H = - \sum_{i=1}^s p_i \ln p_i$$

zur Beschreibung der Diversität (Artenvielfalt) eines Ökosystems genannt, in den sowohl die Anzahl  $s$  ( $s > 1$ ) der im System befindlichen Arten (taxonomische Gruppen) als auch deren relative Häufigkeiten  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) eingehen ( $0 \leq p_i \leq 1$ ;  $\sum_i p_i = 1$ ); für  $p_i = 0$  denke man sich als Funktionswert von  $p_i \ln p_i$  den rechtsseitigen Grenzwert. Bei festem  $s$  ist die durch  $H$  ausgedrückte Diversität am größten, wenn alle Arten gleich häufig sind. (Das kann – ohne partielle Ableitungen – auf elementarem Wege unter Beachtung der Konvexität von  $f(p) = p \ln p$  gezeigt werden.) Da der für  $p_1 = p_2 = \dots = p_s = 1/s$  angenommene Maximalwert  $H_{max} = \ln s$  von der Artenanzahl  $s$  abhängt, ist von zwei Systemen mit uniformen Abundanzen das mit der größeren Artenzahl „diverser“ im Sinne des Shannon-Index.

*Beispiel 1:* Im Zuge einer Zustandsanalyse eines Fließgewässers (Piesting) wurden im Jahre 1985 an zwei Stellen Bodenproben genommen und die darin enthaltenen Individuen des Makrozoobenthos ausgezählt. Die relativen Häufigkeiten der wichtigsten taxonomischen Gruppen sind in Tabelle 1 zusammen mit der jeweiligen gesamten Individuendichte (pro  $m^2$ ) sowie dem aus den Häufigkeiten errechneten Shannon-Index angeführt. Auffallend ist die geringe Diversität der Stelle 2, wobei die Artenverarmung mit einer hohen Individuendichte (einer Gruppe) gepaart ist. Tatsächlich widerspiegelt dieser biologische Befund zwei Stellen mit sehr unterschiedlicher Belastung wider: Stelle 1 ist weitgehend frei von anthropogenen Einflüssen, Stelle 2 liegt im Einflußbereich der Abwasserleitung einer Papierfabrik und stellt einen Exremlebensraum dar, in dem nur wenige resistente Arten überleben.

Neben dem Shannon-Index werden noch andere Indizes zur Beschreibung der Artenmannigfaltigkeit verwendet (z.B. der Simpson-Index, der gleich der Wahrscheinlichkeit ist, daß zwei dem Ökosystem aufs Geratewohl entnommene Individuen zur selben Art gehören). Auch zur Beschreibung des Gütezustandes eines Gewässers werden Kennzahlen, sogenannte Saprobienindizes, gebildet. Als Saprobität bezeichnet man den biologischen Zustand eines Gewässers, der durch Verunreinigung mit organischen, fäulnisfähigen Substanzen verursacht wurde. Man unterscheidet vier Saprobitätsstufen (Güteklasse I bis IV), zu denen verschiedene Arten (Leitorganismen) eine unterschiedliche Affinität besitzen.

tax. Gruppe	rel. Häufigkeit in %	
	Stelle 1	Stelle 2
<i>Ephemeridae</i>	34.4	1.0
<i>Plecoptera</i>	5.9	0.1
<i>Trichoptera</i>	30.7	0.4
<i>Diptera</i>	8.5	93.6
<i>Coleoptera</i>	7.0	0.2
<i>Oligochaeta</i>	11.0	4.6
Rest	2.5	0.1
Ind.-Dichte	6320	26120
Shannon-Index	1.63	0.30

Tabelle 1

## 2.2 Zusammenhangsanalysen

Eines der wichtigsten Hilfsmittel der deskriptiven Modellierung ist die Regressionsanalyse. Im einfachsten Fall geht es dabei darum, die Abhängigkeit einer Größe  $Y$  von einer zweiten Größe  $X$  mit Hilfe einer geeignet gewählten Funktion  $f$  zu beschreiben, die in der Regel mehrere unbestimmte Parameter enthält. Die Parameter werden meist so bestimmt, daß man den Funktionsgraph nach der Methode der kleinsten Quadrate an eine durch simultane Messung von  $X$  und  $Y$  gewonnene Beobachtungsreihe  $(x_i, y_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) anpaßt. Handelt es sich bei  $X$  um die Zeit, nennt man die Beobachtungsreihe speziell eine Zeitreihe. Viele Umweltgrößen zeigen einen ausgeprägten jahreszeitlichen Zyklus, den man in erster Näherung mit einem trigonometrischen Polynom erster Ordnung modelliert. Die Umweltgröße  $Y$  denken wir uns jeweils zur Monatsmitte gemessen. Indem wir die Zeitmessung in Monaten vereinbaren, können wir für die Beobachtungszeitpunkte  $t_i = i - 0.5$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ) schreiben. Die entsprechenden Beobachtungswerte von  $Y$  seien  $y_i$ , die Werte des trigonometrischen Näherungspolynoms lassen sich durch

$$y(t_i) = a_0 + a_1 c_i + b_1 s_i \quad \text{mit } c_i = \cos(\pi t_i / 6), \quad s_i = \sin(\pi t_i / 6)$$

ausdrücken. Wie man auf elementarem Wege (d.h. ohne Verwendung von partiellen Ableitungen) zeigen kann, sind die Kleinste-Quadrat-Schätzer für die Modellparameter  $a_0$ ,  $a_1$  und  $b_1$  durch

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} y_i, \quad \hat{a}_1 = \frac{2}{12} \sum_{i=1}^{12} y_i c_i \quad \text{und} \quad \hat{b}_1 = \frac{2}{12} \sum_{i=1}^{12} y_i s_i$$

Monat	mg PO <sub>4</sub> /l	Temp./°C
Jänner	0.32	4.5
Februar	0.30	4.0
März	0.24	6.7
April	0.15	10.5
Mai	0.09	12.6
Juni	0.12	15.1
Juli	0.18	17.6
August	0.22	16.0
September	0.22	15.5
Oktober	0.35	10.4
November	0.34	7.3
Dezember	0.28	1.4

Tabelle 2

gegeben (Timischl 1986). Somit stellt  $\hat{a}_0$  den Jahresmittelwert dar, während der Scheitelwert  $A$  des „Grundzyklus“ durch  $\sqrt{\hat{a}_1^2 + \hat{b}_1^2}$  gegeben ist.

*Beispiel 2:* Im Jahre 1989 wurden in der Donau (km 2060.3, Kraftwerk Ybbs-Persenbeug) die in Tabelle 2 angegebenen Phosphatwerte (in mg PO<sub>4</sub>/l) jeweils ca. zur Monatsmitte bestimmt. Wenn die Zeit in Monaten gemessen wird und der Nullpunkt der Zeitskala mit dem Jahresanfang zusammenfällt, läßt sich mit Hilfe der obigen Formeln die PO<sub>4</sub>-Schwankung um den Jahresmittelwert  $a_0 = 0.234$  durch die allgemeine Sinusfunktion  $A \sin(\pi t/6 + \phi)$  mit  $A = 0.109$  und  $\phi = -27.3^\circ$  approximieren. Abb. 1 zeigt die so errechneten Jahresmittelwerte zusammen mit den Amplituden der dominanten jahreszeitlichen Schwingungskomponente für die Jahre 1982 bis 1990. Besonders auffallend ist der Rückgang des Jahresmittelwertes nach 1986, den man auf die Verbreitung von phosphatfreien Waschmitteln zurückzuführen kann. Auch die jahreszeitliche Schwankung wird absolut kleiner, bleibt aber praktisch unverändert, wenn man sie auf den Mittelwert bezieht. Es stellt sich die Frage, was die doch recht starke Schwankung von ca. 50% des jeweiligen Mittelwerts verursacht. Ein naheliegender Einflußfaktor auf die Phosphorlöslichkeit ist die Wassertemperatur, mit der man – wieder mittels eines linearen Regressionsansatzes – fast 40% der jahreszeitlichen PO<sub>4</sub>-Variabilität erklären kann.

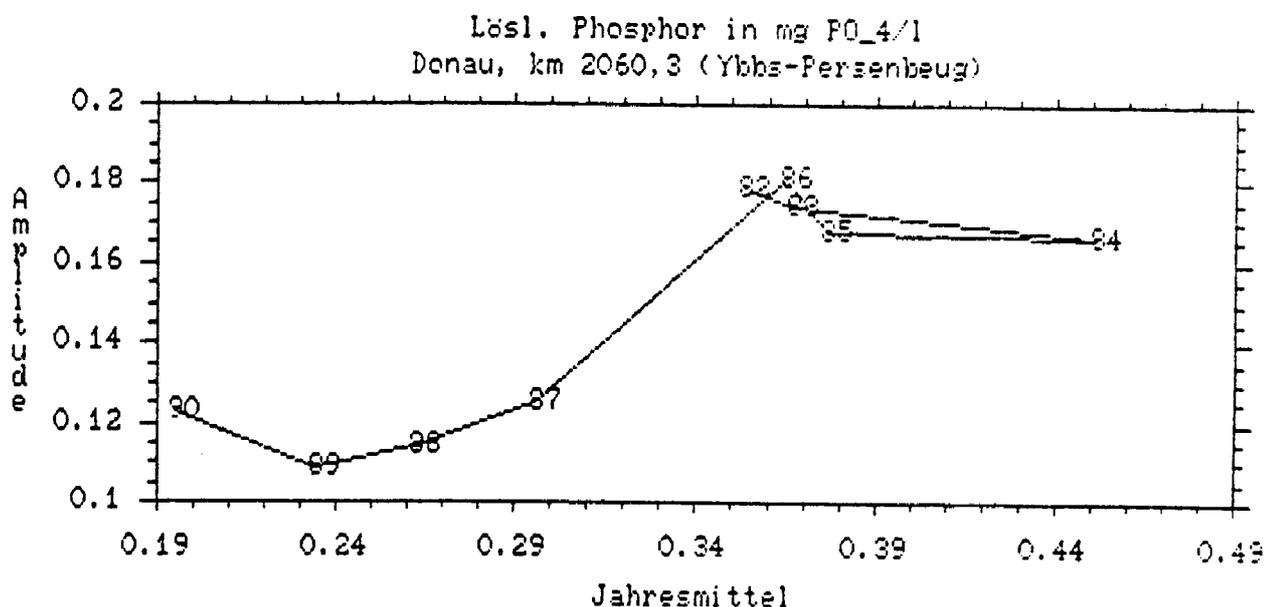


Abb. 1

### 3 Analytische Modellierung

#### 3.1 Der klassische Ansatz

Die Grundlage der analytischen Modellierung bilden Differential- oder Differenzgleichungen, die i.a. eine Bilanz bezüglich Masse oder Energie zum Ausdruck bringen. Das Aufstellen der Gleichungen erfolgt meist aus einem reduktionistischen Ansatz heraus: Das betrachtete System (der betrachtete Prozeß) wird in „handhabbare“ Elemente (z.B. Raum- oder Zeitelemente) zerlegt, diese werden nach bekannten Naturgesetzen bzw. mit Hilfe von Plausibilitätsbetrachtungen bilanziert, und schließlich aus den Bilanzgleichungen (Differentialgleichungen) durch Integration Aussagen über das System bzw. den Prozeß abgeleitet. Es ist nicht verwunderlich, daß diese in Physik und Technik so erfolgreiche Vorgangsweise auch zur Modellierung von Ökosystemen eingesetzt wurde und geradezu symptomatisch für das sogenannte „Goldene Zeitalter“ der mathematischen Ökologie wurde.

*Beispiel 3:* Zur Illustration betrachten wir ein einfaches Modell für ein Fließgewässer, das mit konstanter Geschwindigkeit  $u$  in  $x$ -Richtung strömt. An der Stelle  $x = 0$  wird kontinuierlich ein bestimmter Fremdstoff eingeleitet, der sich an der Einleitstelle völlig mit dem Wasser vermischt und dort eine (zeitunabhängige) Konzentration  $c_0$  bewirkt. Der Fremdstoff wird mit der Rate  $k$  bestandsproportional abgebaut. Nach Verstreichen einer genügend lange Zeit ab Beginn der Einleitung wird sich ein stationärer Ver-

lauf der Fremdstoffkonzentration einstellen, die über den Flußquerschnitt als konstant angenommen wird. Gesucht ist die Konzentration  $c(x)$  in Abhängigkeit von  $x$ . Ad hoc läßt sich dafür nicht so leicht eine Formel angeben. Erfolgversprechender ist es, sich auf ein „kleines“ Volumselement  $\Delta V = A\Delta x$  zwischen  $x$  und  $x + \Delta x$  zu konzentrieren (vorausgesetzt wird ein konstanter Querschnitt  $A$  des Wasserkörpers). Sei  $c(x')$  ( $x \leq x' \leq x + \Delta x$ ) die mittlere Konzentration in dem betrachteten Volumselement. Pro Zeiteinheit geht in  $\Delta V$  die Fremdstoffmenge  $kc(x')A\Delta x$  durch Zerfall verloren, die Menge  $c(x)Au$  fließt zu und die Menge  $c(x + \Delta x)Au$  fließt ab. Im stationären Fall müssen sich die Zu- und Abgänge aufheben, d.h., es muß  $c(x)Au = c(x + \Delta x)Au + kc(x')A\Delta x$  sein. Nach Division durch  $\Delta x$  und anschließendem Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$  ergibt sich daraus die Differentialgleichung

$$u \frac{dc}{dx} = -kc$$

mit der Lösung  $c(x) = c_0 \exp(-kx/u)$  zum Anfangswert  $c(0) = c_0$ . Die Konzentrationsabnahme erfolgt also exponentiell mit der Rate  $k/u$ . Bei einer Fließgeschwindigkeit von  $u=2\text{m/s}$  (dieser Wert entspricht ungefähr der mittleren Geschwindigkeit der Donau bei Nußdorf) und einer Zerfallsrate von  $k=2.5\text{d}^{-1}$  (dieser Wert entspricht etwa der Abbaurrate von fäkalkoliformen Bakterien bei  $20^\circ\text{C}$ ) ist die Konzentration erst nach rund 50km auf die Hälfte des Ausgangswertes gesunken.

*Beispiel 4:* Die gängige Wassergütebestimmung beruht derzeit vor allem auf dem Sauerstoffgehalt, der durch sauerstoffeintragende Prozesse ( $\text{O}_2$ -Aufnahme aus der Luft) und durch sauerstoffverbrauchende Prozesse ( $\text{O}_2$ -Bedarf zum aeroben Abbau von organischen Substanzen) bestimmt ist. Wir betrachten im folgenden ein grobes Zeitmodell für den Sauerstoffhaushalt in einem Fließgewässerabschnitt und bezeichnen die Konzentration (in  $\text{mg/l}$ ) des gelösten Sauerstoffs mit  $c(t)$ . Die zeitliche Änderung der Sauerstoffkonzentration errechnen wir aus der pro Zeit- und Volumseinheit zugeführten bzw. verbrauchten Sauerstoffmenge. Die  $\text{O}_2$ -Zufuhr stellt einen Sättigungsprozeß dar, den man als exponentielle Annäherung an die Sättigungskonzentration  $c_s$  darstellen kann. Diesem Prozeß liegt die plausible Vorstellung zugrunde, daß die pro Zeit- und Volumseinheit aufgenommene  $\text{O}_2$ -Menge  $(dc/dt)_+$  proportional zum auf die Sättigungskonzentration fehlenden Sauerstoffdefizit ist, d.h.  $(dc/dt)_+ = k_a(c_s - c)$ . Die Konstante  $k_a$  (in  $1/\text{d}$ ) kann nach der (halbempirischen) Formel

$$k_a = \frac{2.26u}{h^{2/3}} e^{0.024(\theta-20)}$$

aus der mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $u$  (in m/s), der mittleren Wassertiefe  $h$  (in m) und der Wassertemperatur  $\theta$  (in °C) bestimmt werden. Den Abbau des im Gewässer befindlichen organischen Materials denken wir uns als exponentiellen Zerfallsprozeß und dementsprechend möge der für den Abbau benötigte Sauerstoff  $L$  (in mg/l) von einem gewissen Anfangswert  $L_0$  exponentiell abnehmen, d.h.  $L(t) = L_0 \exp(-k_b t)$ . Die Abbaurate  $k_b$  (in 1/d) hängt nach der Formel

$$k_b = k_{20} 1.05^{\theta - 20}$$

von der Wassertemperatur (in °C) sowie der durch den Parameter  $k_{20}$  zum Ausdruck gebrachten Verschmutzung des Wassers ab ( $k_{20}$  liegt für stark verunreinigtes Wasser bei 0.35, für schwach verunreinigtes Wasser bei 0.15, für Trinkwasser bei 0.05). Der Anfangswert  $L_0$  ist im allgemeinen nicht bekannt, wohl aber der sogenannte biochemische Sauerstoffbedarf  $BSB_5 = L_0 - L(5d)$ , d.h. jene Sauerstoffmenge, die innerhalb von 5 Tagen zum biochemischen Abbau der organischen Inhaltstoffe unter Mitwirkung von Mikroorganismen verbraucht wird. Für den Abbau organischer Substanzen wird also pro Zeit- und Volumseinheit die Sauerstoffmenge  $(dc/dt)_- = k_b L_0 \exp(-k_b t)$  benötigt, so daß insgesamt die zeitliche Änderung der Sauerstoffkonzentration durch

$$\frac{dc}{dt} = \left(\frac{dc}{dt}\right)_+ - \left(\frac{dc}{dt}\right)_- = k_a(c_s - c) - k_b L_0 e^{-k_b t}$$

gegeben ist (Jorgensen 1988). Als Lösung dieser Differentialgleichung zum Anfangswert  $c(0) = c_0$  findet man unter der Voraussetzung  $k_a \neq k_b$

$$c = c_s - \frac{k_b L_0}{k_a - k_b} (e^{-k_b t} - e^{-k_a t}) - (c_s - c_0) e^{-k_a t}.$$

Wenn  $k_a(c_s - c_0) < k_b L_0$  ist, nimmt  $c$  an der Stelle

$$t_c = \frac{1}{k_a - k_b} \ln \left[ \frac{k_a}{k_b} \left( 1 - \frac{(c_s - c_0)(k_a - k_b)}{L_0 k_b} \right) \right],$$

den Minimalwert  $c_{min} = k_b L_0 \exp(-k_b t_c) / k_a$  an. Stellt man sich vor, daß zum Zeitpunkt  $t = 0$  an der Stelle  $x = 0$  eine bestimmte Abwasserfracht in das Fließgewässer eingeleitet wird, und daß sich das Flußwasser zusammen mit der in ihm vermischten Abwasserfracht mit der Geschwindigkeit  $u$  weiterbewegt, so kann man mit dem kritischen Zeitpunkt  $t_c$  eine durch  $x_c = u t_c$  gegebene kritische Entfernung von der Einleitstelle verbinden, in der die Sauerstoffkonzentration am geringsten und folglich die Wassergüte am schlechtesten ist.

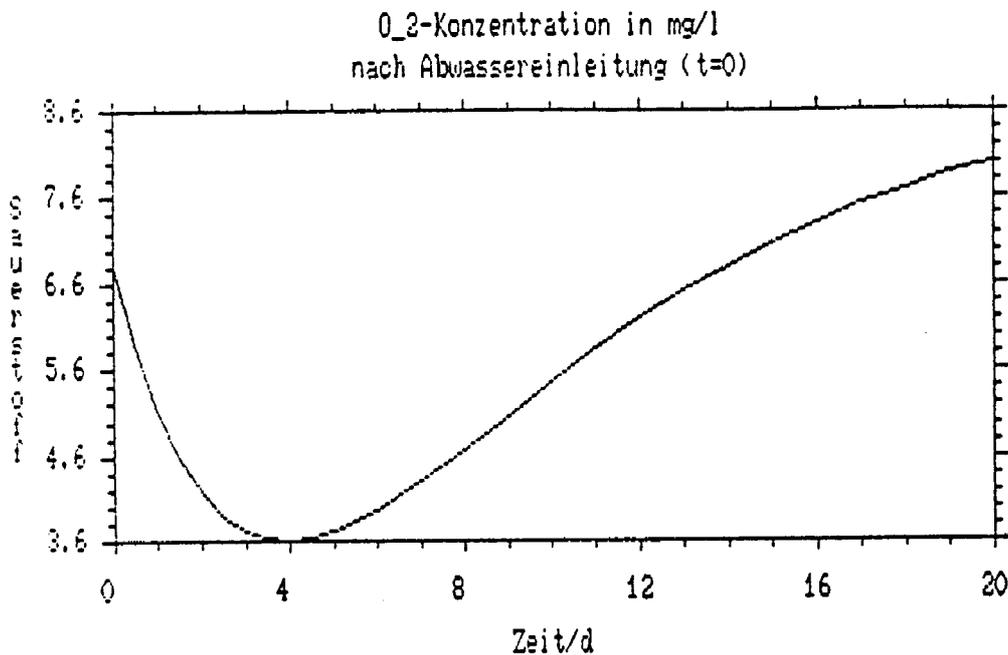


Abb. 2

Als Zahlenbeispiel betrachte man ein (schwach verunreinigtes) Fließgewässer ( $BSB_5=2\text{mg/l}$ ) mit einem Wasserfluß von  $2000\text{m}^3/\text{h}$ , einer Strömungsgeschwindigkeit von  $u = 0.2\text{m/s}$ , einer mittleren Wassertiefe von  $h = 2\text{m}$  und einer Wassertemperatur von  $20^\circ\text{C}$ . Die Sauerstoffsättigung betrage  $9\text{mg/l}$  und die Konzentration des gelösten  $\text{O}_2$  sei  $8\text{mg/l}$ . In den betrachteten Fluß werden pro Stunde  $500\text{m}^3$  stark verschmutztes Abwasser ( $BSB_5=40\text{mg/l}$ , Wassertemperatur  $20^\circ\text{C}$ ,  $\text{O}_2$ -Konzentration  $2\text{mg/l}$ ) eingeleitet. Um die kritische Entfernung  $x_c$  von der Einleitstelle (d.h. jene mit der minimalen Sauerstoffkonzentration) zu bestimmen, berechnen wir zuerst den biochemischen Sauerstoffbedarf  $BSB_5 = (2000 \cdot 2 + 500 \cdot 40)/2500 = 9.6\text{mg/l}$  des Mischwassers, die anfängliche Sauerstoffkonzentration  $c_0 = (2000 \cdot 8 + 500 \cdot 2)/2500 = 6.8\text{mg/l}$ , die Aufnahme- bzw. Abbauraten  $k_a = 0.28\text{d}^{-1}$  und  $k_b = k_{20} = 0.15\text{d}^{-1}$  (wir nehmen für das Mischwasser einen  $k_{20}$ -Wert von  $0.15$  an), sowie  $L_0 = 18.2\text{mg/l}$  mit Hilfe von  $BSB_5 = L_0 - L(5d)$ . Als kritischen Zeitwert findet man dann  $t_c = 3.95\text{d}$ , woraus die minimale Sauerstoffkonzentration  $c_{min} = 3.61\text{mg/l}$  in der Entfernung  $x_c = 68\text{km}$  folgt. Der zeitliche Verlauf der  $\text{O}_2$ -Konzentration ist in Abb. 2 dargestellt.

*Beispiel 5:* Auch bei der Modellierung von Populationssystemen geht man in Regel von Mengenbilanzen aus, nach denen die zeitliche Änderung der betrachteten Bestandsgrößen (Individuendichten) als Differenzen von Zugangs- und Abgangstermen dargestellt sind. (vgl. Nöbauer/Timischl 1979, Hofbauer/Sigmund 1984, Frauenthal 1980). Ein wohlbekanntes Bei-

spiel ist das nach A. Lotka und V. Volterra benannte Räuber-Beute-Modell

$$\frac{dB}{dt} = (a - bR)B, \quad \frac{dR}{dt} = (-c + dB)R,$$

in dem  $B(t)$  und  $R(t)$  die Dichten der Beute- bzw. Räuberpopulation bezeichnen. Offensichtlich sind  $B^* = c/d$  und  $R^* = a/b$  konstante Lösungen, also Gleichgewichtswerte. Es läßt sich leicht zeigen, daß für alle (positiven) Anfangswerte  $B(0) \neq B^*$ ,  $R(0) \neq R^*$  die Lösungen um die durch die Gleichgewichtswerte gegebenen Zeitmittel schwingen. Daraus ergibt sich die auf den ersten Blick überraschende Folgerung, daß eine Vergrößerung der exponentiellen Wachstumsrate  $a$  der Beutepopulation (z.B. durch weniger intensives Bejagen) ausschließlich die Räuber begünstigt. Tatsächlich war es gerade eine Beobachtung dieser Art, die Volterra durch ein Modell zu erklären suchte. Einem Biologen, der Fischfangdaten auswertete, fiel nämlich auf, daß während des ersten Weltkriegs, durch den die Fischfangtätigkeit insgesamt eingeschränkt war, überproportional gute Haifangergebnisse zu verzeichnen waren. Diese Beobachtung wurde von Volterra als ein aus einem Räuber-Beute-Verhältnis resultierenden Wechselwirkungseffekt erklärt. Das (und nicht etwa die Gewinnung von quantitativen Aussagen) war auch der Zweck des einfachen Räuber-Beute-Modells, das einen Meilenstein in der Entwicklung der „qualitativen Systemökologie“ bildet, in dem es die Notwendigkeit einer „ganzheitlichen“ Betrachtungsweise deutlich machte.

Da im einfachen Räuber-Beute-System die Zeitmittelwerte in stetiger Weise von den Modellparametern abhängen, sind mit „kleinen“ Veränderungen der Parameter auch „kleine“ Änderungen des durch die Zeitmittelwerte zum Ausdruck gebrachten Systemverhaltens verbunden. Im Gegensatz dazu sind Beispiele von natürlichen Populationssystemen bekannt, in denen geringfügige Änderungen Umweltbedingungen katastrophale Folgen haben, die sozusagen plötzlich von einem Zustand in einen anderen „umkippen“. So kam es um 1950 im Pazifik zu einem Kollaps der Sardinenfischerei und parallel dazu zu einem starken Anwachsen einer denselben Lebensraum bewohnenden Sardellenart. Auch diese Beobachtung kann durch ein klassisches Modell der Ökologie erklärt werden, und zwar als Ergebnis einer durch den Menschen gestörten Wechselwirkung zweier um dieselbe ökologische Nische konkurrierenden Populationen. Das ebenfalls auf Volterra zurückgehende Konkurrenzmodell wird durch die Gleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1x_1 - d_1N(x_1, x_2)x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = r_2x_2 - d_2N(x_1, x_2)x_2$$

beschrieben, in denen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  die Dichten der miteinander konkurrierenden Populationen bezeichnen;  $r_1 > 0$  bzw.  $r_2 > 0$  sind die konstanten (pro-Kopf-) Wachstumsraten und  $d_1 N(x_1, x_2)x_1$  bzw.  $d_2 N(x_1, x_2)x_2$  die von der „Nischenbelastung“  $N(x_1, x_2)$  abhängigen Konkurrenzterme. Die Nischenbelastung  $N(x_1, x_2)$  stelle man sich als Linearkombination der Populationsdichten mit positiven Koeffizienten  $s_1$  bzw.  $s_2$  vor. Unser Interesse gilt dem asymptotischen Verhalten der Populationsdichten für  $t \rightarrow \infty$ . Aus

$$d_2 \frac{1}{x_1} \frac{dx_1}{dt} - d_1 \frac{1}{x_2} \frac{dx_2}{dt} = d_1 d_2 \left( \frac{r_1}{d_1} - \frac{r_2}{d_2} \right) = A$$

ergibt sich durch Integration

$$d_2 \ln x_1 - d_1 \ln x_2 = At + B, \text{ d.h. } x_1^{d_2} x_2^{-d_1} = C e^{At},$$

wobei  $B$  die Integrationskonstante bezeichnet und  $C$  eine von den Anfangswerten abhängige positive Konstante darstellt. Wenn man von dem Sonderfall  $A = 0$  absieht, kann o.B.d.A.  $A < 0$ , d.h.  $r_1/d_1 < r_2/d_2$  angenommen werden. Wegen  $\exp(At) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  und wegen der Beschränktheit der Populationsdichten folgt, daß  $x_1$  gegen Null strebt. Die Population mit der kleineren „Fitness“  $r_i/d_i$  ist im Nachteil und stirbt schließlich aus (Exklusionsprinzip von Volterra). Wir stellen uns nun ein System vor, in dem z.B.  $r_1/d_1 < r_2/d_2$  gilt. Zu einem gewissen Zeitpunkt wird die im Vorteil befindliche zweite Art mit einer (bestandsproportionalen) Intensität  $E$  bejagt, so daß sich ihre effektive Wachstumsrate auf  $r'_2 = r_2 - E$  verkleinert. Bei genügend großem  $E$  kann nun aber  $r_1/d_1 > r'_2/d_2$  werden, was zu einem „Umkippen“ des Systems führt, in dem nun die zweite Art vom Aussterben bedroht ist.

### 3.2 Quasistationäre Approximation

Der klassisch-reduktionistische Ansatz stößt bei biologischen Systemen auf Grenzen, was weniger an deren Komponentenzahl liegt (auch die gaskinetischen Systeme sind sehr komponentenreich und werden doch erschöpfend mit den Modellen der Statistischen Thermodynamik erfaßt), sondern an der Tatsache, daß biologischen Systemen eine i.a. komplizierte „Ganzheitsstruktur“ (Organisation) aufgeprägt ist. Die geforderte Untersuchung der „Ganzheit“ zwingt speziell auch bei der Modellierung von Ökosystemen zu einer rigorosen Beschränkung der Variablenzahl, wozu meist zwei Techniken eingesetzt werden, nämlich die Fixierung von „Hintergrundvariablen“ durch

quasistationäre Approximation sowie die Aggregation durch Kompartimentbildung.

Im allgemeinen treten in einem Ökosystem Veränderungen auf, die nicht synchronisiert ablaufen, wie z.B. Einschwingvorgänge mit unterschiedlichen Zeitkonstanten oder periodische Vorgänge mit unterschiedlichen Frequenzen. Konzentriert man die Betrachtungsweise auf eine Variable oder einen Variablenkomplex, durch den ein interessierendes Phänomen beschrieben wird, so können in erster Näherung solche Variable, die einerseits einer wesentlich langsameren Kinetik unterliegen als die interessierenden Variablen oder andererseits ein wesentlich rascheres Einschwingverhalten aufweisen, als „quasistationär“ angesehen werden. Auf diese Weise läßt sich in dem einen oder anderen Fall die Anzahl der dynamischen Variablen reduzieren. Eine Voraussetzung dafür ist natürlich, daß man eine Vorstellung über die Größenordnung der Änderungsraten der einzelnen Variablen besitzt.

*Beispiel 6:* Als Beispiel betrachte man das Wachstum einer Population unter Berücksichtigung selbstregulativer Mechanismen. Die Wachstumskinetik kann durch das System

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad \frac{dr}{dt} = -m \left( r - r_0 \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \right)$$

mit den Zustandsvariablen  $x$  (Populationsgröße) und  $r$  (Wachstumsrate) dargestellt werden. Schreibt man die zweite Gleichung in der Form

$$r = r_0 \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{1}{m} \frac{dr}{dt},$$

so wird deutlich, daß die Wachstumsrate zeitverzögert (mit der Zeitkonstanten  $1/m$ ) auf Änderungen der Populationsgröße reagiert. Bei großem  $m$  stellt sich  $r$  praktisch momentan auf den durch  $x$  bestimmten Gleichgewichtswert ein. In diesem Fall reduzieren sich die ursprünglich betrachteten Wachstumsgleichungen auf die sogenannte logistische Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = r_0 \left( 1 - \frac{x}{K} \right) x,$$

in der  $r_0$  die Geschwindigkeit der exponentiellen Annäherung an den Gleichgewichtswert  $K$  (Umweltkapazität) von  $x$  bestimmt. Dem (weitverbreiteten) logistischen Ansatz liegt also eine quasistationäre Approximation zugrunde, die auf der Annahme beruht, daß die Wachstumsrate  $r$  (bei konstantem  $x$ ) einer schnelleren Kinetik folgt als die Populationsgröße  $x$ . Durch lineare Approximation des ursprünglichen Gleichungssystems an der Gleichgewichtsstelle  $x = K, r = 0$  findet man, daß die Populationsgröße nach einer Störung

sich oszillatorisch dem Gleichgewichtswert nähert, wenn  $m < 4r_0$  ist. Dagegen strebt  $x$  für  $m > 4r_0$  monoton gegen  $K$ , zeigt also qualitativ dasselbe Verhalten, wie die Lösung der durch quasistationäre Approximation aus dem ursprünglichen System gewonnenen logistischen Gleichung.

### 3.3 Aggregation durch Kompartimentbildung

Die Kompartimentmodellierung ist eine auch in der Ökologie weitverbreitete Technik der Systembeschreibung. Sie beruht auf der Vorstellung, wonach man die Materie- oder Energieflüsse in einem System näherungsweise dadurch wiedergeben kann, daß man eine Zerlegung des Gesamtsystems in eine bestimmte Anzahl  $n$  von (meist hypothetischen) Teilen, sogenannten Kompartimenten, vornimmt und den Materie- bzw. Energieaustausch zwischen diesen durch ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung bilanziert. Bezeichnet  $x_i(t)$  die Quantität der betrachteten Verteilungsgröße (Materie, Energie) im  $i$ -ten Kompartiment zum Zeitpunkt  $t$ , dann gilt bei Beschränkung auf bestandsproportionale Austauschprozesse zwischen den Kompartimenten für das  $i$ -te Kompartiment die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j \neq i} f_{ji} x_j + I_i - f_i x_i.$$

Hier bedeutet  $f_{ji}$  ( $j \neq i$ ) den Anteil von  $x_j$ , der pro Zeiteinheit vom  $j$ -ten in das  $i$ -te Kompartiment gelangt. Mit  $f_i$  ist der vom  $i$ -ten Kompartiment pro Zeiteinheit nach außen abgehende Anteil von  $x_i$  zusammengefaßt und die Größe  $I_i$  drückt einen von außen, d.h. nicht von den  $(n - 1)$  anderen Kompartimenten, herrührenden Zugang aus.

*Beispiel 7:* In dem folgenden Beispiel soll die Verteilung von Blei (vorwiegend  $PbO_2$ ) und seine Anreicherung im menschlichen Körper modelliert werden (Batschelet et al. 1979). Das Beispiel gehört in das Gebiet der Ökotoxikologie, die sich mit Schadwirkungen von chemischen Stoffen auf Ökosysteme und Rückwirkungen auf den Menschen befaßt. Wir gehen von dem in Abb. 3 dargestellten Blockdiagramm aus, das drei Kompartimente enthält, nämlich das Blut (1), das Gewebe (2) und die Knochen (3). Der jeweilige Bleigehalt (in  $\mu g$ ) zum Zeitpunkt  $t$  sei  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  bzw.  $x_3(t)$ . In das Blutkompartiment gelangt pro Zeiteinheit die Bleimenge  $I_1$ , die sich aus dem Zugang  $I_1'$  aus den Lungen und dem Zugang  $I_1''$  aus dem Verdauungstrakt zusammensetzt. Die über die Lungen in das Blut aufgenommene Bleimenge stellt einen gewissen Anteil  $p$  ( $0 < p < 1$ ) der pro Zeit eingeatmeten Bleimenge  $\alpha$  dar, d.h.  $I_1' = p\alpha$ . Analog wird von der pro

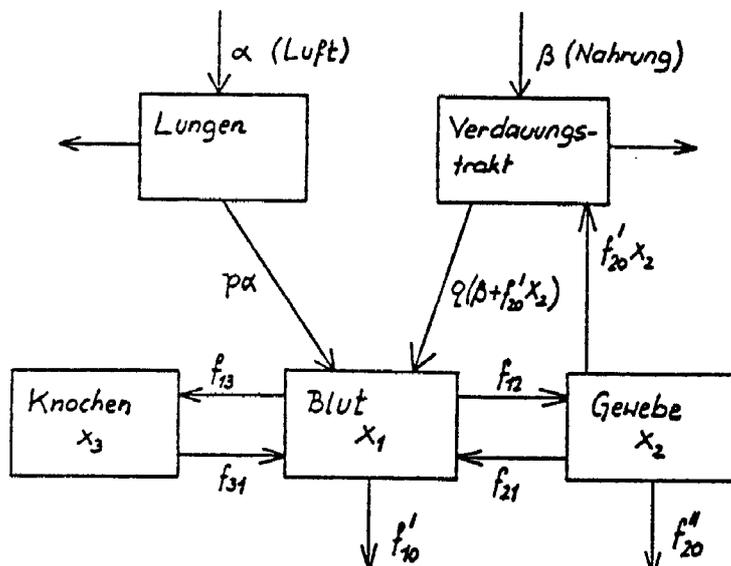


Abb. 3

Zeiteinheit in den Verdauungstrakt gelangende Bleimenge  $V$  der Anteil  $q$  ( $0 < q < 1$ ) absorbiert, d.h.  $I_1'' = qV$ . Die Größe  $V$  setzt sich aus dem aus der Nahrung stammenden Menge  $\beta$  und aus der über Speichel, Galle und Magensekrete aus dem Gewebekompartiment in den Verdauungstrakt zurückgeführten Bleimenge  $G$  zusammen. Bei Annahme von bestandsproportionalen Austauschprozessen ist  $G = f'_{20}x_2$  mit einer gewissen Ausscheiderate  $f'_{20}$ . Die pro Zeiteinheit vom Blut aufgenommene Bleimenge ist also  $I_1 = I_1' + I_1'' = p\alpha + q(\beta + f'_{20}x_2)$ . Die Intensität des direkten Bleiaustausches zwischen den Kompartimenten wird durch die Austauschraten  $f_{13}$ ,  $f_{31}$ ,  $f_{12}$  und  $f_{21}$  erfaßt. Schließlich sind noch die pro Zeiteinheit auf dem Harnweg aus dem Blutkompartiment ausgeschiedene Bleimenge  $f'_{10}x_1$  und die aus dem Gewebe in Haare und Nägel gelangende bzw. durch Schweißbildung verlorene Bleimenge  $f''_{20}x_2$  zu berücksichtigen. Faßt man die pro Zeiteinheit stattfindenden Zu- und Abgänge für jedes der drei Kompartimente zusammen, findet man die Modellgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -(f_{12} + f_{13} + f'_{10})x_1 + (f_{21} + qf'_{20})x_2 + f_{31}x_3 + D \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_{12}x_1 - (f_{21} + f'_{20} + f''_{20})x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_{13}x_1 - f_{31}x_3, \end{aligned}$$

wobei der Systeminput (d.h. die durch Atmung und Nahrungsaufnahme pro Zeiteinheit aufgenommene Bleimenge) durch  $D = p\alpha + q\beta$  abgekürzt wurde. Eine Vorstellung über die Größenordnung der Austauschraten geben die folgenden Werte, die von einer (in Los Angeles lebenden) Testperson stammen (alle Angaben in  $1/d$ ):  $f_{12} = 0.0111$ ,  $f_{13} = 0.00389$ ,  $f'_{10} = 0.0211$ ,  $f_{21} = f'_{20} = 0.0114$ ,  $f_{31} = 0.000035$ ,  $f''_{20} = 0.00571$ . Die Testperson war einem Bleiinput von  $\alpha = 49\mu\text{g}/d$  sowie  $\beta = 367\mu\text{g}/d$  ausgesetzt, die Absorptionskoeffizienten betragen  $p = 0.347$  und  $q = 0.088$ . Setzt man diese Werte in die Modellgleichungen ein, folgt

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -0.0361x_1 + 0.0124x_2 + 0.000035x_3 + D \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0.0111x_1 - 0.0285x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 0.00389x_1 - 0.000035x_3\end{aligned}$$

mit  $D = 49.3\mu\text{g}/d$ . Die erhaltenen Differentialgleichungen lassen sich natürlich exakt lösen. Das Zeitverhalten der Lösungen wird bekanntlich durch die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des homogenen Systems bestimmt. Alle Wurzeln sind reell und kleiner als Null, so daß man jedes  $x_i$  als Summe eines durch  $D$  bestimmten Gleichgewichtswertes  $x_i^*$  und exponentiell (mit den Zeitkonstanten 22.38d, 50d und 32637d) ablingenden Einschwingtermen darstellen kann. Aber auch ohne einschlägige Kenntnisse kann man zumindest qualitativ das Zeitverhalten erkennen, wobei die Struktur der Koeffizienten des Gleichungssystems eine quasistationäre Approximation nahelegt, die darauf beruht, daß  $x_3$  einer wesentlich langsameren Kinetik unterliegt als die beiden anderen Kompartimentvariablen. Eine Änderung von  $x_1$  bewirkt über die dritte Gleichung ebenfalls auch eine Änderung von  $x_3$ , die aber extrem langsam erfolgt, nämlich mit einer Zeitkonstante, die durch den Kehrwert  $1/0.000035 \approx 28000$  des Koeffizienten von  $x_3$  abgeschätzt werden kann. Damit kann  $x_3$  in der ersten Gleichung als praktisch konstant angesehen und wegen des im Vergleich zu den Koeffizienten der anderen Variablen extrem kleinen Koeffizienten 0.000035 überhaupt vernachlässigt werden, so daß die beiden ersten Gleichungen von der dritten entkoppelt sind. Die Zeitkonstanten, mit denen  $x_1$  und  $x_2$  nach einer Störung in neue Gleichgewichtswerte einschwingen, schätzen wir wieder durch die Kehrwerte  $1/0.0361=27.7$  bzw.  $1/0.0285=35.09$  der Koeffizienten von  $x_1$  und  $x_2$  ab, was wegen der schwachen Kopplung ( $0.0124 \cdot 0.0111 \ll 0.0361 \cdot 0.0285$ ) möglich ist. Die Diskussion des Zeitverhaltens zeigt also, daß nach erfolgter Störung

(z.B. Veränderung des Systeminputs  $D$ )  $x_1$  und  $x_2$  schon nach etwa 100 Tagen,  $x_3$  aber erst nach 100 Jahren in neue Gleichgewichtswerte eingeschungen sind.

Nach dieser grundlegenden Diskussion des Zeitverhaltens wollen wir noch eine kurze Input/Output-Analyse im „steady-state“ anschließen. Durch Nullsetzen der Ableitungen ergeben sich, die Formeln  $x_1^* = 36.5D$ ,  $x_2^* = 14.2D$  und  $x_3^* = 4057D$  für die Abhängigkeit der Gleichgewichtswerte (in  $\mu\text{g}$ ) vom Systeminput  $D$ . Nimmt man nun an, daß unsere Testperson einer Atmosphäre ausgesetzt ist, die doppelt so viel Blei wie die ursprüngliche enthält, dann steigt  $D$  von  $49.3\mu\text{g/d}$  auf  $p \cdot 2\alpha + q\beta = 66.3\mu\text{g/d}$ , also um rund 35%. Um denselben Prozentsatz erhöhen sich die Gleichgewichtswerte in den Kompartimenten.

#### 4 Schlußbemerkungen und Ausblick

Die betrachteten Beispiele sind einerseits von der Modellierung her einfach, andererseits aber auch einfach im Hinblick auf die bei der Modellösung zur Anwendung gelangenden mathematischen Methoden. Die Einfachheit wurde erkaufte durch eine Beschränkung auf kleine Systeme, auf im wesentlichen lineare Phänomene sowie auf entweder nur von der Zeit bzw. nur vom Ort abhängige Zustandsvariable. Die in den beiden folgenden Beispielen angeschnittenen Problemkreise sprengen diesen Rahmen und stellen gleichsam „Kostproben“ für weitergehende Modellbildungen dar.

*Beispiel 8:* Die in der ökologischen Literatur noch vor kurzem nahezu als Dogma dargestellte These, daß die Stabilität eines Ökosystems mit seiner Komplexität wächst, wird heute zunehmend kritischer beurteilt (Wissel 1989). Als Argument für die hohe Stabilität artenreicher Systeme wird häufig ein Vergleich mit Bauwerken herangezogen, wonach die Wechselwirkungen zwischen den Arten wie Streben die Konstruktion (das System) zusammenhalten sollen. Auch wird auf die Anfälligkeit von artenarmen Kulturlandschaften (z.B. gegenüber einem Schädlingsbefall) verwiesen, die artenreiche Naturlandschaften nicht in diesem Ausmaß zeigen. Daraus abzuleiten, daß allgemein die Stabilität eines Systems mit dessen Komplexität erklärt werden kann, ist aber ein Trugschluß.

Einer der ersten mathematischen Arbeiten zu dieser Thematik geht auf R. May (1973) zurück, der die Stabilität von Ökosystemen untersuchte, die durch einen Zufallsmechanismus gebildet worden sind. Wir denken uns ein aus  $n$  Populationen bestehendes Ökosystem (mit den Individuendichten  $x_i$ )

durch die klassischen Lotka-Volterra'schen Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i \left( r_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

beschrieben. Die Parameter  $r_i$  sind als Wachstumsraten interpretierbar, die  $\alpha_{ij}$  ( $i \neq j$ ) bringen den Einfluß der  $j$ -ten Population auf die Wachstumsrate der  $i$ -ten Population zum Ausdruck und die  $\alpha_{ii} > 0$  sind intraspezifische Konkurrenzparameter. Die Lotka-Volterra'schen Gleichungen enthalten die in Abschnitt 3.1 betrachteten Populationssysteme (Räuber-Beute bzw. Konkurrenzmodell) als Sonderfälle. Das betrachtete System möge sich in einem Gleichgewichtszustand mit den positiven Gleichgewichtswerten  $x_1 = x_1^*, \dots, x_n = x_n^*$  befinden. Über das Verhalten des Systems nach einer (als genügend klein angenommenen) Störung des Gleichgewichtszustandes gibt die mit den Gleichgewichtswerten berechnete Jacobi-Matrix  $A = (a_{ij})$  mit den Elementen

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = -x_i^* \alpha_{ij}$$

Auskunft ( $A$  heißt in diesem Zusammenhang auch die Kommunitätenmatrix des Modells im Gleichgewichtszustand  $x^*$ .) Der Gleichgewichtszustand ist bekanntlich genau dann (lokal) stabil, wenn alle Eigenwerte von  $A$  negative Realteile besitzen.

Zur Simulation des Stabilitätsverhaltens eines artenreichen Ökosystems werden nun eine große Anzahl von Kommunitätenmatrizen „zufällig“ generiert und auf Stabilität untersucht. Die Generierung einer jeden Matrix  $A$  erfolgt auf dem folgenden Weg: (1) Die Diagonalelemente, die alle nach Voraussetzung negativ sind, werden gleich 1 gesetzt. (2) Die durch die  $a_{ij}$  mit  $i \neq j$  zum Ausdruck gebrachte Beeinflussung der Population  $i$  durch die Population  $j$  wird durch ein zweistufiges Zufallsexperiment simuliert. Ist die Realisierung  $z$  einer in  $(0, 1)$  gleichverteilten Zufallsvariablen größer als ein vorgegebener Index  $C$  ( $0 < C < 1$ ), der den Grad der Vermaschung im aufzubauenden Netzwerk kennzeichnet, dann wird  $a_{ij} = 0$  gesetzt, d.h. die Population  $i$  übt auf die Population  $j$  keinen Einfluß aus. Andernfalls gibt es eine Interaktion zwischen den beiden Populationen, die so quantifiziert wird, daß man  $a_{ij}$  als eine Realisierung einer normalverteilten Zufallsvariablen mit dem Mittelwert 0 und der Standardabweichung  $S$  betrachtet, wobei  $S$  die Stärke der möglichen Interaktion ausdrückt.

Die auf diese Weise simulierten Ökosysteme besitzen eine interessante Schwellenwerteigenschaft: Sie sind für  $2nS^2C < 1$  „fast immer“ stabil, dagegen für  $2nS^2C > 1$  „fast immer“ instabil. Als eine unmittelbare Konsequenz

ergibt sich daraus, das ein durch den beschriebenen Zufallmechanismus generiertes Ökosystem bei großem  $n$ ,  $S$  oder  $C$  im allgemeinen instabil ist. Umgekehrt kann man aus der Beobachtung von hoch vermaschten, stark wechselwirkenden bzw. artenreichen Ökosystemen den Schluß ziehen, daß diese sich nicht aufs Geratewohl strukturiert haben können. Vielmehr ist anzunehmen, daß im Laufe der Entwicklung die zur Ausbildung eines instabilen Verhaltens führenden Elemente verschwunden sind. Ein etwas differenzierteres Bild ergibt sich, wenn man von vornherein nur „biologisch sinnvolle“ Netzwerke zuläßt.

*Beispiel 9:* Die Beschreibung der Ausbreitung von Luftschadstoffen stellt einen zentralen Problemkreis im technischen Umweltschutz dar (Pasquill 1968, Shukla et al. 1987). Im einfachsten Fall denke man sich eine im freien Raum befindliche Schadstoffquelle (im Nullpunkt eines dreidimensionalen Koordinatensystems), aus der zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine bestimmte Schadstoffmenge  $Q_0$  entweicht. Wenn die Verteilung des Schadstoffes ausschließlich durch (isotrope) Diffusion in einem ruhenden Medium mit der Diffusionskonstanten  $D$  erfolgt, so gehorcht, wie man durch Lösung der Diffusionsgleichung zeigen kann, die Schadstoffkonzentration  $c(r, t)$  im Abstand  $r$  von der Emissionsstelle dem Ausbreitungsgesetz

$$c(r, t) = \frac{Q_0}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right).$$

Damit kann man z.B. leicht zeigen, daß der Maximalabstand  $r_{max}$  von der Emissionsstelle, in dem eine bestimmte kritische Konzentration  $c^*$  gerade noch auftreten kann, durch

$$r_{max} = \sqrt{\frac{3Q_0^{2/3}}{2\pi e(Dc^*)^{2/3}}}$$

gegeben ist.

Eine weitere Grundaufgabe bei der mathematischen Beschreibung der Schadstoffausbreitung ist die folgende: An der Stelle  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  befinde sich (im freien Raum) eine Punktquelle, die pro Zeiteinheit  $Q_0$  Schadstoffteilchen kontinuierlich emittiert. Die Ausbreitung erfolge durch Diffusion unter Berücksichtigung eines in  $x_1$ -Richtung blasenden Windes (Geschwindigkeit  $v_1$ ). Die stationäre Verteilung der Schadstoffkonzentration ist nun durch das Ausbreitungsgesetz

$$c(x_1, x_2, x_3) = \frac{Q_0}{4D\pi r} \exp\left(-\frac{v_1}{2D}(r - x_1)\right)$$

mit  $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$  gegeben. Aus diesem erkennt man, daß die Konzentration entlang der  $x_1$ -Achse unabhängig von  $v_1$  hyperbolisch abfällt.

Schließlich sei noch ein sogenanntes Einschichtenmodell kurz betrachtet: An der Stelle  $x_1 = x_2 = 0, x_3 = h$  befinde sich über einem (nicht absorbierenden) Boden eine mit der Intensität  $Q_0$  kontinuierlich emittierende Quelle. Die Ausbreitung erfolge wieder durch isotrope Diffusion, wobei ein Wind der Stärke  $v_1$  in  $x_1$ -Richtung angenommen wird. Dann kann die (stationäre) Bodenkonzentration entlang der  $x_1$ -Achse durch die Formel

$$c(x_1) = \frac{Q_0}{2\pi D \sqrt{x_1^2 + h^2}} \exp\left(-\frac{v_1}{2D}(\sqrt{x_1^2 + h^2} - x_1)\right)$$

ausgedrückt werden. Wie man unschwer zeigen kann, tritt die maximale Bodenkonzentration ungefähr in der Entfernung  $x_1 = h$  auf, die der Höhe der Emissionsquelle über dem Boden entspricht.

## Literatur

- Batschelet, E., Brand, L., Steiner, A.: On the Kinetics of Lead in the Human Body. *J.Math.Biol.* 8, 15-23(1979).
- Bossel, H.: *Umweltdynamik*. München: te-wi Verlag 1985.
- Carson, R.: *The Silent Spring*. New York: Fawcett 1962.
- Fabian, P.: *Atmosphäre und Umwelt*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1987.
- Frauenthal, J.C.: *Introduction to Population Modeling*. Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1980.
- Hofbauer, J., Sigmund, K.: *Evolutionstheorie und dynamische Systeme*. Berlin-Hamburg: Parey 1984.
- Jeffers, J.N.R.: *Microcomputers in Environmental Biology*. Oxford: Univ. Press 1990.
- Jorgensen, S.E.: *Fundamentals of Ecological Modelling*. Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo: Elsevier 1988.
- May, R.: *Stability and complexity in model ecosystems*. Princeton: Univ. Press 1973.

- Nöbauer, W., Timischl, W.: Mathematische Modelle in der Biologie. Braunschweig-Wiesbaden: Vieweg 1979.
- Pasquill, F.: Atmospheric Diffusion. London: Van Nostrand 1968.
- Pielou, E.C.: Mathematical Ecology. New York-London: Wiley 1977.
- Richter, O.: Simulation des Verhaltens ökologischer Systeme. Weinheim: VCH-Verlagsgesellschaft 1985.
- Shukla, J.B., Hallam, T.G., Capasso, V.: Mathematical Modelling of Environmental and Ecological Systems. Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo: 1987.
- Spain, J.D.: BASIC Microcomputer Models in Biology. London-Amsterdam-Tokyo: Addison-Wesley 1982.
- Timischl, W.: Beschreibung periodischer Vorgänge in Natur und Technik. Didaktik-Reihe der ÖMG, Heft 15, Wien 1987.
- Wissel, Ch.: Theoretische Ökologie. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1989.